МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Москва, 2022

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

Основы применения рядов Чебышёва при построении численно-аналитических методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений

(Учебное пособие)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Настоящее учебное пособие состоит из трех разделов.

В первом разделе рассматриваются классические многочлены Чебышёва первого рода на отрезке $[-1, 1]$ и смещенные многочлены Чебышёва на отрезке $[0, 1]$. Вводятся ряды Фурье по многочленам Чебышёва первого рода (ряды Чебышёва) и ряды Фурье по смещенным многочленам Чебышёва (смещенные ряды Чебышёва). Обсуждаются достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье в виде признака Дирихле–Жордана и теоремы Дини–Липшица. Условия равномерной сходимости рядов Чебышёва выводятся на основе соответствующих признаков о тригонометрических рядах Фурье.

Во втором разделе рассматривается задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучается разложение решения этой задачи и его производной в смещенный ряд Чебышёва. Устанавливается связь между коэффициентами Чебышёва решения и коэффициентами Чебышёва правой части нормальной системы.

В третьем разделе рассматривается задача Коши для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Кроме того, как и во втором разделе выводятся формулы, связывающие коэффициенты Чебышёва решения задачи с коэффициентами Чебышёва правой части канонической системы, а также формулы, связывающие коэффициенты Чебышёва производной решения с коэффициентами Чебышёва правой части системы. Все три раздела образуют основу теоретических подходов к построению численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Этим методам посвящены отдельные пособия. В каждом разделе используется своя последовательная нумерация формул.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов механико-математического факультета МГУ, однако может быть полезно студентам, аспирантам и научным сотрудникам других факультетов МГУ, интересующимся вопросами полиномиальной аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Ряды Чебышёва. Будем использовать систему многочленов Чебышёва первого рода, которые определяются посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{1}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\ T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1, \\ T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x, \\ T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1 \end{aligned}$$

и т.д. Мы ограничимся действительной областью и дополнительным предположением о переменной x, а именно, будем полагать $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда многочлены Чебышёва можно представить в следующей тригонометрической форме:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Эта система многочленов ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,, \tag{2}$$

т.е.

$$(T_i, T_j) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, T_i(x) T_j(x)\, dx = 0 \tag{3}$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i, T_i) = |T_i|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(см. теорему 5.1. в [1]).

Будем использовать также систему смещенных многочленов Чебышёва первого рода $T_n^*(x)$ на отрезке $[0, 1]$, которые простым образом связаны с многочленами T_n:

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1), \qquad n = 0, 1, \ \ldots \ . \tag{5}$$

Из определения (5) и рекуррентной формулы (1) следует рекуррентная формула для смещенных многочленов

$$T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x),$$

из которой вычисляем коэффициенты начальных многочленов $T_n^*(x)$:

$$\begin{aligned}
T_0^*(x) &= 1, \\
T_1^*(x) &= 2x - 1, \\
T_2^*(x) &= 8x^2 - 8x + 1, \\
T_3^*(x) &= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1, \\
T_4^*(x) &= 128x^4 - 256x^3 + 160x^2 - 32x + 1, \\
T_5^*(x) &= 512x^5 - 1280x^4 + 1120x^3 - 400x^2 + 50x - 1, \\
T_6^*(x) &= 2048x^6 - 6144x^5 + 6912x^4 - 3584x^3 + 840x^2 - 72x + 1
\end{aligned}$$

и т.д. Последовательность многочленов $T_n^*(x)$ ортогональна на отрезке $[0, 1]$ с весом

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}\,, \tag{6}$$

т.е.

$$(T_i^*, T_j^*) = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}\, T_i^*(x) T_j^*(x)\, dx = 0 \tag{7}$$

при $i \neq j$. При этом

$$(T_i^*, T_i^*) = |T_i^*|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\,, & i > 0, \\ \pi, & i = 0 \end{cases} \tag{8}$$

(см. теорему 5.2. в [1]).

1.1. Ряды Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. Рассмотрим действительную функцию $f(x)$, которая определена на отрезке $[-1, 1]$ и квадрат которой интегрируем на $[-1, 1]$ с весом $p(x)$ (2). Используя обычное обозначение для такого функционального пространства $L_2(-1,\,1;\,p(x))$, можно записать:

$$f(x) \in L_2\left(-1, 1; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) .$$

Для функции $f(x)$ можно определить коэффициенты Фурье

$$a_i[f] = \frac{1}{|T_i|^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, f(x) T_i(x)\, dx, \qquad i = 0, 1, \, \dots \, .$$

Рассмотрим ряд Фурье по ортогональным многочленам Чебышёва $T_i(x)$ первого рода

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[f] \cdot T_i(x). \tag{9}$$

Ряд (9) называется также *рядом Чебышёва* функции $f(x)$. Сделаем небольшое отступление от приведенного выше обозначения коэффициента $a_0[f]$ и определим его теперь по следующей общей для всех $a_i[f]$ формуле при $i = 0$. Определим коэффициенты $a_i[f] = a_i$ по формуле

$$a_i[f] = a_i = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, f(x) T_i(x)\, dx, \qquad i = 0, 1, \, \dots \, . \tag{10}$$

С помощью подстановки $x = \cos t$ получаем равносильную формулу

$$a_i[f] = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(\cos t) \cos it\, dt, \qquad i = 0, 1, \, \dots \, . \tag{11}$$

Введем обозначение

$$\sum_{j=l}^{m}{}' a_j = \frac{1}{2}\, a_l + a_{l+1} + \, \dots \, + a_m, \qquad m \geqslant l. \tag{12}$$

Тогда ряд Чебышёва (9) функции $f(x)$ может быть представлен так:

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i[f] \cdot T_i(x), \tag{13}$$

где $a_i[f]$ определены по формуле (10). Коэффициенты (10) также называются *коэффициентами Чебышёва* функции $f(x)$.

Коэффициент Чебышёва (11) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$. Ряд Чебышёва (13) функции $f(x)$ при условии $x = \cos t$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i[f] \cdot \cos it \tag{14}$$

является также тригонометрическим рядом Фурье четной функции

$$\varphi(t) = f(\cos t).$$

Для функции

$$f(x) \in L_2\left(0, 1; \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\right)$$

рассмотрим ряд Фурье по смещенным многочленам Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f] \cdot T_i^*(x), \tag{15}$$

где символ $\sum{}'$ определен формулой (12). Коэффициенты ряда определяются по формуле

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) T_i^*(x)\, dx, \qquad i = 0, 1, \ldots . \tag{16}$$

Ряд (15) называется также *смещенным рядом Чебышёва* функции $f(x)$. С помощью подстановки

$$x = \cos^2 \frac{t}{2} \tag{17}$$

и соотношения

$$T_i^*(x) = T_{2i}(\sqrt{x}), \qquad x \geqslant 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

(см. § 1, теорему 1.13 в [1]) получаем равносильную формулу для коэффициентов $a_i^*[f]$:

$$a_i^*[f] = a_i^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right) \cos it\, dt, \qquad i = 0, 1, \ldots . \tag{19}$$

Подставим (17) в $T_i^*(x)$:

$$T_i^*\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right) = T_{2i}\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \cos\left(2i \arccos \cos \frac{t}{2}\right) = \cos\left(2i \cdot \frac{t}{2}\right) = \cos it. \qquad (20)$$

Коэффициент Чебышёва (19) функции $f(x)$ совпадает с тригонометрическим коэффициентом Фурье четной функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$. Из (20) следует, что смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ при условии $x = \cos^2 \frac{t}{2}$

$$\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[f] \cdot \cos it \qquad (21)$$

является также тригонометрическим рядом Фурье четной функции

$$\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right).$$

Для функций, принадлежащих указанным здесь функциональным пространствам, их ряды Чебышёва (13) (и, соответственно, смещенные ряды Чебышёва (15)) сходятся в этих пространствах к данным функциям, т.е. *сходятся в среднем с весом* $p(x)$ из (2) (и, соответственно, *сходятся в среднем с весом* $p(x)$ из (6)). *Многочленами наилучшего приближения степени* n для таких функций являются n-е частичные суммы этих рядов.

Вопрос о равномерной сходимости ряда Чебышёва (13) и смещенного ряда Чебышёва (15) функции $f(x)$ сводится к вопросу о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (14) четной функции $\varphi(t) = f(\cos t)$ и тригонометрического ряда Фурье (21) четной функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \frac{t}{2}\right)$. Условия, достаточные для равномерной сходимости рядов Чебышёва, являются следствием соответствующих теорем о тригонометрических рядах Фурье.

1.2. Условия равномерной сходимости рядов Чебышёва. Напомним некоторые определения.

Определение 1. Действительная функция $f(x)$, определенная на сегменте $[a,\, b]$, называется функцией *ограниченной вариации* или *ограниченного изменения* на сегменте $[a,\, b]$, $a < b$, если для любого разбиения сегмента

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

числовое множество

$$V[\{x_i\}] = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

ограничено сверху. Точная верхняя грань множества $\{V[\{x_i\}]\}$ называется *полным изменением* или *полной вариацией* функции $f(x)$ на сегменте $[a,\, b]$ и обозначается символом

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{V[\{x_i\}]\}$$

(см. гл. 9, дополнение 2, стр. 386 в [3] или гл. XV, § 4 в [2]).

Примером функции с ограниченным изменением на сегменте $[a,\, b]$ может служить любая ограниченная монотонная функция; для такой функции имеем $\bigvee\limits_a^b = |f(b) - f(a)|$.

Другим примером функции с ограниченной вариацией является функция, удовлетворяющая в промежутке $[a,\, b]$ условию Липшица

$$|f(t) - f(z)| \leqslant L|t - z|,$$

где $L = \text{const}$, а t и z — любые точки промежутка $[a,\, b]$, причем

$$\bigvee_a^b f(x) \leqslant L(b - a).$$

В частности, функция, имеющая на сегменте ограниченную производную, будет в этом сегменте функцией с ограниченным изменением. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a,\, b]$, то

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

Геометрически вариация непрерывной функции $f(x)$ представляет собой длину проекции кривой $y = f(x)$ на ось ординат, считая кратность покрытия.

Определение 2. Для каждого $\delta > 0$ *модулем непрерывности* функции $f(x)$ на сегменте $[a,\, b]$ называется точная верхняя грань модуля разности

$$|f(x') - f(x'')|$$

по всем точкам $x',\, x'' \in [a, b]$, удовлетворяющим неравенству $|x' - x''| \leqslant \delta$ (см. гл. 4, § 6, п. 4 в [3]).

Таким образом, по определению

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : |x' - x''| \leqslant \delta; \quad x', x'' \in [a, b]\}. \tag{22}$$

В этом определении вместо сегмента $[a,\, b]$ может быть интервал $(a,\, b)$ или какое-нибудь другое множество $\{x\}$. Приведем в качестве примеров модули непрерывности некоторых функций.

Модуль непрерывности функции $f(x) = x^3$ на сегменте $[0,\, 1]$ имеет вид

$$\omega(x^3, \delta) = 3\delta(1 - \delta) + \delta^3.$$

Модуль непрерывности функции $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ на интервале $(0,\, 1)$ записывается так:

$$\omega\Big(\cos\frac{1}{x}, \delta\Big) = 2.$$

Модуль непрерывности функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на интервале $(0,\, 1)$ имеет вид

$$\omega\Big(\frac{1}{x}, \delta\Big) = +\infty.$$

Приведем теоремы о равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Признак Дирихле–Жордана (см. гл. XIX, § 4, п. 699 в [2]).

Ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos ix + b_i \sin ix), \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\, ix\, dx, \qquad i = 0, 1, \,\ldots\,, \\ b_i &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\, ix\, dx, \qquad i = 1, 2, \,\ldots\,, \end{aligned} \tag{24}$$

периодической с периодом 2π функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно в промежутке $[a,\, b]$, если в некотором более широком промежутке $[A,\, B]$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение.

В частности, *если функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-\pi,\, \pi]$, непрерывна в этом промежутке и имеет в нем ограниченное изменение, а также удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее ряд Фурье во всем промежутке сходится к ней равномерно.*

Для доказательства достаточно продолжить функцию $f(x)$ периодически с периодом 2π на всю числовую ось, тогда за промежуток $[A,\, B]$ можно взять любой, содержащий внутри себя промежуток $[-\pi,\, \pi]$.

Теорема Дини–Липшица (см. гл. 8, § 5, п. 5 в [4]).

Для равномерной на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ *сходимости тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x)$ *достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию* $f(-\pi) = f(\pi)$ *и чтобы ее модуль непрерывности на сегменте* $[-\pi,\, \pi]$ *имел порядок*

$$\omega(f,\delta) = o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big)\,, \tag{25}$$

т.е. являлся при $\delta \to 0$ *бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем* $\dfrac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Докажем следующие две теоремы о равномерной сходимости рядов Чебышёва.

Тоерема 1. *Для произвольной функции* $f(x)$, *непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на сегменте* $[-1,\, 1]$, *ее ряд Чебышёва* (13) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[-1,\, 1]$.

Для произвольной функции $f(x)$, *непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на сегменте* $[0,\, 1]$, *ее смещенный ряд Чебышёва* (15) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[0,\, 1]$.

Доказательство. Пусть $\{t_i\}$ — произвольное разбиение отрезка $[-\pi,\, \pi]$:

$$-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = \pi. \tag{26}$$

Пусть $x = \cos t$; обозначим $\varphi(t) = f(\cos t)$. Тогда

$$V[\{t_i\}] = \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(\cos t_{i+1}) - f(\cos t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{27}$$

При изменении i от 0 до n точки $x_i = \cos t_i$ будут пробегать отрезок $[-1,\, 1]$ два раза: слева направо и справа налево. Пусть m — такое значение i, при котором $x_m < x_{m+1}$ и $x_{m+1} > x_{m+2}$. Разобьем последнюю сумму в (27) на две суммы:

$$V[\{t_i\}] = \sum_{i=0}^{m} |f(x_{i+1} - f(x_i)| + \sum_{i=m+1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{28}$$

Обозначим $x_i = \tau_{n+1-i}$, $n-i = j$. Тогда вторую сумму в (28) можно представить в виде

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} |f(\tau_{n+1-i}) - f(\tau_{n-i})| = \sum_{j=1}^{n-m-1} |f(\tau_{j+1}) - f(\tau_j)|. \tag{29}$$

Точки x_i при изменении i от 0 до m (в первой сумме (28)) монотонно возрастают от -1 до 1. Точки τ_j при изменении j от 1 до $n-m-1$ (в правой сумме (29)) также монотонно возрастают от -1 до 1. Первая сумма в (28) ограничена сверху полным изменением функции $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$, т.е. величиной $\bigvee\limits_{-1}^{1} f(x)$. Сумма (29), а следовательно, и вторая сумма в (28) тоже ограничена этой величиной. Таким образом, для произвольного разбиения (26) сегмента $[-\pi, \pi]$ сумма $V[\{t_i\}]$ в (27) ограничена сверху, а именно

$$V[\{t_i\}] \leqslant 2 \bigvee_{-1}^{1} f(x). \tag{30}$$

Следовательно, функция $\varphi(t) = f(\cos t)$ является непрерывной функцией в промежутке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условию $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ и имеет в нем ограниченное изменение. Поэтому по признаку Дирихле–Жордана ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (14) с коэффициентами (11) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним ряд Чебышёва (13) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1, 1]$.

Точки $x'_i = \cos^2 \dfrac{t_i}{2}$ при изменении i от 0 до n пробегают отрезок $[0, 1]$ два раза: слева направо и справа налево. Аналогично доказывается, что для произвольного разбиения (26) сумма

$$V[\{t_i\}] = \sum_{i=0}^{n-1} |\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| f\left(\cos^2 \frac{t_{i+1}}{2}\right) - f\left(\cos^2 \frac{t_i}{2}\right) \right| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x'_{i+1}) - f(x'_i)| \tag{31}$$

для функции $\psi(t) = f\left(\cos^2 \dfrac{t}{2}\right)$ также ограничена сверху, а именно

$$V[\{t_i\}] \leqslant 2 \bigvee_{0}^{1} f(x). \tag{32}$$

Следовательно, функция $\psi(t) = f\left(\cos^2 \dfrac{t}{2}\right)$ является непрерывной функцией в промежутке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условию $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и имеет в нем ограниченное изменение. Поэтому по признаку Дирихле–Жордана ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (21) с коэффициентами (19) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0, 1]$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если модуль непрерывности функции* $f(x)$ *на сегменте* $[-1,\,1]$ *имеет порядок*

$$\omega(f,\delta)=o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big)\,, \tag{33}$$

то ее ряд Чебышёва (13) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[-1,\,1]$.

Если модуль непрерывности функции $f(x)$ *на сегменте* $[0,\,1]$ *имеет порядок* (33), *то ее смещенный ряд Чебышёва* (15) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на сегменте* $[0,\,1]$.

Доказательство. Пусть $t',\ t''\in[-\pi,\,\pi]$ и $|t'-t''|\leqslant\delta$. Для $x=\cos t$ и $\varphi(t)=f(\cos t)$ имеем

$$|x'-x''|=|\cos t'-\cos t''|\leqslant|t'-t''|\leqslant\delta;$$

$$|\varphi(t')-\varphi(t'')|=|f(\cos t')-f(\cos t'')|=|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega(f,\delta). \tag{34}$$

Из (34) следует, что между модулем непрерывности функции $\varphi(t)=f(\cos t)$ на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ и модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[-1,\,1]$ выполняется неравенство

$$\omega(\varphi,\delta)\leqslant\omega(f,\delta). \tag{35}$$

Из (33) и (35) получаем

$$\omega(\varphi,\delta)=o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big)\,. \tag{36}$$

Таким образом, функция $\varphi(t)=f(\cos t)$ удовлетворяет условию $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$ и ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi,\,\pi]$ имеет порядок (36). Поэтому по теореме Дини–Липшица ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (14) с коэффициентами (11) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\,\pi]$. Значит, и совпадающий с ним ряд Чебышёва (13) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[-1,\,1]$.

Для $x=\cos^2\dfrac{t}{2}$ и $\psi(t)=f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$ имеем

$$|x'-x''|=\Big|\cos^2\frac{t'}{2}-\cos^2\frac{t''}{2}\Big|=\Big|\frac{1+\cos t'}{2}-\frac{1+\cos t''}{2}\Big|=$$

$$=\frac{1}{2}\,|\cos t'-\cos t''|\leqslant\frac{1}{2}\,|t'-t''|\leqslant\frac{1}{2}\,\delta,$$

$$\begin{aligned}|\psi(t')-\psi(t'')|&=\Big|f\Big(\cos^2\frac{t'}{2}\Big)-f\Big(\cos^2\frac{t''}{2}\Big)\Big|=|f(x')-f(x'')|\leqslant\\&\leqslant\omega\Big(f,\frac{\delta}{2}\Big)\leqslant\omega(f,\delta).\end{aligned} \tag{37}$$

Из (37) следует, что между модулем непрерывности функции $\psi(t) = f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$ на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ и модулем непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[0,\, 1]$ выполняется неравенство

$$\omega(\psi, \delta) \leqslant \omega(f, \delta). \tag{38}$$

Из (33) и (38) получаем

$$\omega(\psi, \delta) = o\Big(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\Big). \tag{39}$$

Таким образом, функция $\psi(t) = f\Big(\cos^2\dfrac{t}{2}\Big)$ удовлетворяет условию $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ и ее модуль непрерывности на сегменте $[-\pi,\, \pi]$ имеет порядок (39). Поэтому по теореме Дини–Липшица ее тригонометрический ряд Фурье (23) с коэффициентами (24) или, что то же самое, ряд (21) с коэффициентами (19) сходится к ней равномерно на сегменте $[-\pi,\, \pi]$. Значит, и совпадающий с ним смещенный ряд Чебышёва (15) функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте $[0,\, 1]$. Теорема доказана.

Следствие. *Если на сегменте* $[-1,\, 1]$ (*соответственно на сегменте* $[0,\, 1]$):
а) функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant L|x' - x''|, \tag{40}$$

где $L = \mathrm{const}$, x', x'' — любые точки сегмента, или

б) функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте и ее производная ограничена на нем

$$|f'(x)| \leqslant L, \tag{41}$$

то ряд Чебышёва (13) *функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте* [-1, 1] (*соответственно смещенный ряд Чебышёва* (15) *функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на сегменте* $[0,\, 1]$).

Доказательство. Если на указанном сегменте выполнено условие (40) или (41), то на этом сегменте $f(x)$ является функцией с ограниченной вариацией. Ее модуль непрерывности на этом сегменте имеет порядок $\omega(f, \delta) = O(\delta)$. Следовательно, для функции $f(x)$ выполнены условия обеих теорем.

2. Разложение решения задачи Коши в смещенный ряд Чебышёва. Применим изложенную выше теорию к вопросу о разложении решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_f = x_0 + X, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

и его производной в смещенные ряды Чебышёва. Предполагается, что функция $f(x,\, y)$ имеет в области определения непрерывные ограниченные частные производные по переменным x и y, а задача Коши (1), (2) имеет на отрезке $[x_0, , x_f]$ единственное решение.

Зададим некоторое число $h \leqslant X$ и рассмотрим на отрезке $[x_0,\, x_0+h]$ задачу Коши (1), (2). Представим независимую переменную x в виде

$$x = x_0 + \alpha h.$$

Выражение для новой переменной

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h}\,.$$

На отрезке $[x_0,\, x_0+h]$ переменная α изменяется от 0 до 1. Рассмотрим решение $y(x)$ как функцию переменной α:

$$y(x) = y(x_0 + \alpha h) = z(\alpha).$$

Тогда система уравнений первого порядка для функции $z(\alpha)$ преобразуется к виду

$$z'(\alpha) = hf\bigl(x_0 + \alpha h, z(\alpha)\bigr), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{3}$$

$$z(0) = y_0. \tag{4}$$

Мы допускаем, как уже говорилось, что правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения (1) обладает непрерывными ограниченными частными производными по аргументам x и y. Тогда из теоремы о гладкости решений дифференциальных уравнений (см., например, § 29 в [5]) вытекает существование непрерывной на [0, 1] производной у каждой из функций $z(\alpha)$ и

$$z'(\alpha) = y'(x_0 + \alpha h)h. \tag{5}$$

Тем самым будут выполнены достаточные условия равномерной сходимости на [0, 1] смещенных рядов Чебышёва для функций $z(\alpha)$ и $z'(\alpha)$. Эти условия сформулированы в следствии из теорем 1 и 2 в разделе 1.

Таким образом, решение $y(x)$ на $[x_0,\, x_0+h]$, рассматриваемое как функция переменной α, т.е. $z(\alpha) = y(x_0 + \alpha h)$, и его производная $z'(\alpha)$ разлагаются в смещенные ряды Чебышёва

$$z(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{6}$$

$$z'(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[z'] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{7}$$

равномерно сходящиеся на [0, 1]. Уравнение (3) для $z(\alpha)$ можно переписать в виде

$$z'(\alpha) = h\Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{8}$$

где $\Phi(\alpha)$ — правая часть дифференциального уравнения (1), взятая на решении задачи Коши (1), (2):

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big). \tag{9}$$

Следовательно,

$$a_i^*[z'] = h a_i^*[\Phi]. \tag{10}$$

Установим теперь связь коэффициентов Чебышёва решения $y(x_0+\alpha h)$, рассматриваемого как функция переменной α, с коэффициентами Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ дифференциального уравнения (1).

Воспользуемся формулой (9.29) из теоремы 9.2 в [1], которая связывает коэффициенты Чебышёва функции $z(\alpha)$ с коэффициентами Чебышёва ее производной $z'(\alpha)$:

$$a_i^*[z] = \frac{1}{4i}\big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\big), \qquad i \neq 0.$$

Отсюда и из (10) получаем значения ненулевых коэффициентов Чебышёва решения $y(x_0 + \alpha h)$:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\big), \qquad i \neq 0. \tag{11}$$

Чтобы найти выражение для нулевого коэффициента Чебышёва a_0^* решения, необходимо вернуться к начальному условию (4). Подставим в разложение (6) для $z(\alpha)$ значение $\alpha = 0$ и потребуем, чтобы выполнялось начальное условие (4); используя формулу для значений смещенных многочленов Чебышёва в нуле

$$T_i^*(0) = (-1)^i,$$

имеем

$$
\begin{aligned}
y_0 = &\sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[z]\cdot T_i^*(0) = \sum_{i=0}^{\infty}{}'(-1)^i a_i^*[z] = \\
= &\frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}\big(a_0^*[z'] - a_2^*[z']\big) + \frac{1}{4\cdot 2}\big(a_1^*[z'] - a_3^*[z']\big) + \\
+ &\sum_{i=3}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\big) = \frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}a_0^*[z'] + \frac{1}{4\cdot 2}a_1^*[z'] + \\
+ &\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[z'].
\end{aligned}
$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2}a_0^*[z] = y_0 + \frac{1}{4}a_0^*[z'] - \frac{1}{4\cdot 2}a_1^*[z'] + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[z'].$$

С учетом (10) имеем

$$\frac{1}{2}a_0^*[y(x_0+\alpha h)] = y_0 + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi]. \quad (12)$$

Замечание. Если коэффициенты Чебышёва функции

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big)$$

удовлетворяет условию

$$a_i^*[\Phi] = 0, \quad i \geqslant k+1,$$

то для коэффициентов Чебышёва решения задачи Коши (1), (2) выполняется следующее соотношение:

$$a_i^*[y] = 0, \quad i \geqslant k+2. \quad (13)$$

Соотношение (13) следует из формулы (11).

В качестве примеров найдем разложения решений следующих задач Коши в смещенные ряды Чебышёва на отрезке [0, 1].

1) $y'(x) = 8 + T_2^*(x)$, $y(0) = 5$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Из (12) находим нулевой коэффициент Чебышёва функции $y(x)$

$$\frac{1}{2}\,a_0^*[y] = \frac{53}{6}\,.$$

Из (11) последовательно определяем остальные коэффициенты Чебышёва функции $y(x)$:

$$a_1^*[y] = \frac{15}{4}\,, \quad a_2^*[y] = 0, \quad a_3^*[y] = \frac{1}{12}\,, \quad a_i^*[y] = 0, \quad i \geqslant 4.$$

Получаем окончательный ответ: решение задачи Коши $y(x)$ раскладывается на $[0,1]$ в смещенный ряд Чебышёва

$$y(x) = \frac{53}{6} + \frac{15}{4}T_1^*(x) + \frac{1}{12}T_3^*(x).$$

2) $y'(x) = 5 + T_6^*(x), \quad y(0) = 5, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Аналогично находим:

$$\frac{1}{2}\,a_0^*[y] = \frac{262}{35}\,, \quad a_1^*[y] = \frac{5}{2}\,, \quad a_2^*[y] = a_3^*[y] = a_4^*[y] = 0, \quad a_5^*[y] = -\frac{1}{20}\,,$$
$$a_6^*[y] = 0, \quad a_7^*[y] = \frac{1}{28}\,, \quad a_i^*[y] = 0 \ \text{ при } \ i \geqslant 8.$$

Получаем окончательный ответ: решение задачи Коши $y(x)$ раскладывается на $[0,\ 1]$ в смещенный ряд Чебышёва

$$y(x) = \frac{262}{35} + \frac{5}{2}\,T_1^*(x) - \frac{1}{20}\,T_5^*(x) + \frac{1}{28}\,T_7^*(x).$$

3. Разложение решения уравнений второго порядка в смещенный ряд Чебышёва Теперь обсудим вопрос о разложении решения задачи Коши и его производной в смещенные ряды Чебышёва для случая системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с правой частью, зависящей от производной:

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_f = x_0 + X. \tag{1}$$

Начальные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагается, что функция $f(x,\, y,\, y')$ имеет в области определения непрерывные ограниченные частные производные по переменным x, y, y', а сама задача (1), (2) имеет на отрезке $[x_0,\, x_f]$ единственное решение.

Зададим некоторое число $h \leqslant X$ и рассмотрим на отрезке $[x_0,\, x_0{+}h]$ задачу Коши (1), (2). Представим независимую переменную x в виде

$$x = x_0 + \alpha h.$$

Выражение для новой переменной имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h}\,.$$

На сегменте $[x_0,\, x_0{+}h]$ переменная α изменяется от 0 до 1. Рассмотрим решение $y(x)$ как функцию переменной α:

$$y(x) = y(x_0 + \alpha h) = z(\alpha). \tag{3}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$z'(\alpha) = y'(x_0 + \alpha h) \cdot h, \qquad y'(x_0 + \alpha h) = \frac{z'(\alpha)}{h}\,, \tag{4}$$

$$z''(\alpha) = y''(x_0 + \alpha h) \cdot h^2, \qquad y''(x_0 + \alpha h) = \frac{z''(\alpha)}{h^2}\,, \tag{5}$$

Уравнение (1) на $[x_0,\, x_0 + h]$ для функции новой переменной $z(\alpha)$ принимает вид

$$z''(\alpha) = h^2 f\Big(x_0 + \alpha h, z(\alpha), \frac{z'(\alpha)}{h}\Big), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{6}$$

Начальные условия (2) преобразуются в следующие начальные условия для функции $z(\alpha)$:
$$z(0) = y_0, \tag{7}$$
$$z'(0) = y_0'h. \tag{8}$$
Из (4), (5) следуют очевидные формулы для коэффициентов Чебышёва первой и второй производных решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемых как функции переменной α:
$$a_i^*\big[y'(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{1}{h}\, a_i^*[z'], \tag{9}$$
$$a_i^*\big[y''(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{1}{h^2}\, a_i^*[z''], \tag{10}$$

Из нашего предположения о том, что правая часть $f(x,\, y\,, y')$ дифференциального уравнения (1) обладает непрерывными ограниченными частными производными по аргументам x, y, y', и из теоремы о гладкости решений дифференциальных уравнений (см., например, § 29 в [5]) вытекает существование непрерывной на $[0,\,1]$ производной у каждой из функций $z(\alpha)$, $z'(\alpha)$ и $z''(\alpha)$. Тем самым выполнены достаточные условия равномерной сходимости на $[0, 1]$ смещенных рядов Чебышёва для рассматриваемых функций $z(\alpha)$, $z'(\alpha)$, $z''(\alpha)$. Эти условия сформулированы в следствии из теорем 1 и 2 в разделе 1. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$z(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{11}$$

$$z'(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z'] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{12}$$

$$z''(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z''] \cdot T_i^*(\alpha), \tag{13}$$

Уравнение (6) для $z(\alpha)$ можно представить в виде

$$z''(\alpha) = h^2 \Phi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{14}$$

где $\Phi(\alpha)$ — правая часть дифференциального уравнения (1), взятая на решении задачи Коши (1), (2):

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big). \tag{15}$$

Отсюда

$$a_i^*[z''] = h^2 a_i^*[\Phi]. \tag{16}$$

Теперь установим соотношения коэффициентов Чебышёва первой производной $y'(x_0 + \alpha h)$ и решения $y(x_0 + \alpha h)$, рассматриваемых как функции переменной α, с коэффициентами Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$.

3.1. Соотношения между коэффициентами Чебышёва производной решения и правой части Воспользуемся формулой (9.29) из теоремы 9.2 в [1], которая связывает коэффициенты Чебышёва функции $\varphi(x)$ с коэффициентами Чебышёва ее производной $\varphi'(x)$:

$$a_i^*[\varphi] = \frac{1}{4i}\left(a_{i-1}^*[\varphi'] - a_{i+1}^*[\varphi']\right), \qquad i \neq 0. \tag{17}$$

Заменим в (17) функцию φ на $z'(\alpha)$ и применим (16):

$$a_i^*[z'] = \frac{1}{4i}\left(a_{i-1}^*[z''] - a_{i+1}^*[z'']\right) = \frac{h^2}{4i}\left(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\right) \quad i \neq 0. \tag{18}$$

Учитывая (9), получаем следующие ненулевые коэффициенты Чебышёва производной $y'(x_0 + \alpha h)$:

$$a_i^*[y'(x_0 + \alpha h)] = \frac{h}{4i}\left(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\right), \qquad i \neq 0. \tag{19}$$

Чтобы найти выражение для нулевого коэффициента Чебышёва a_0^* первой производной, необходимо вернуться к начальному условию (8). Подставим в разложение (12) для $z'(\alpha)$ значение $\alpha = 0$ и потребуем, чтобы выполнялось начальное условие (8):

$$\begin{aligned} y_0'h &= {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[z'] \cdot T_i^*(0) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' (-1)^i a_i^*[z'] = \\ &= \frac{1}{2}a_0^*[z'] - \frac{1}{4}\Big(a_0^*[z''] - a_2^*[z'']\Big) + \frac{1}{4\cdot 2}\Big(a_1^*[z''] - a_3^*[z'']\Big) + \\ &+ \sum_{i=3}^{\infty}(-1)^i \frac{1}{4i}\Big(a_{i-1}^*[z''] - a_{i+1}^*[z'']\Big) = \frac{1}{2}a_0^*[z'] - \frac{1}{4}a_0^*[z''] + \frac{1}{4\cdot 2}a_1^*[z''] + \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[z'']. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2}a_0^*[z'] = y_0'h + \frac{1}{4}a_0^*[z''] - \frac{1}{4\cdot 2}a_1^*[z''] + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[z''].$$

С учетом (16) имеем

$$\frac{1}{2}a_0^*[z'] = y_0'h + \frac{h^2}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h^2}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi].$$

Учитывая (9), получаем выражение для нулевого коэффициента Чебышёва $a_0^*[y'(x_0+\alpha h)]$:

$$\frac{1}{2}a_0^*[y'(x_0+\alpha h)] = y_0' + \frac{h}{4}\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\Big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi]. \quad (20)$$

3.2. Соотношения между коэффициентами Чебышёва решения и правой части. Теперь установим связь коэффициентов Чебышёва решения $y(x_0+\alpha h)$, рассматриваемого как функция переменной α, с коэффициентами Чебышева функции $\Phi(\alpha)$. Для этого воспользуемся формулой (9.28) из теоремы (9.2) в [1], которая связывает коэффициенты Чебышёва функции $\varphi(x)$ с коэффициентами Чебышёва ее производной $\varphi^{(m)}$ порядка m:

$$a_i^*[\varphi] = 2^{-2m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\prod_{\substack{l=0\\ l\neq m-j}}^{m}(i+j-l)^{-1}a_{i-m+2j}^*[\varphi^{(m)}], \qquad i > m. \qquad (21)$$

Положим в (21) $m=2$, заменим функцию φ на $z(\alpha)$ и применим (16):

$$\begin{aligned} a_i^*[z] &= \frac{1}{2^4}\Big(\frac{a_{i-2}^*[z'']}{i(i-1)} - 2\frac{a_i^*[z'']}{(i-1)(i+1)} + \frac{a_{i+2}^*[z'']}{i(i+1)}\Big) = \\ &= \frac{h^2}{2^4}\Big(\frac{a_{i-2}^*[\Phi]}{i(i-1)} - 2\frac{a_i^*[\Phi]}{(i-1)(i+1)} + \frac{a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i+1)}\Big), \qquad i > 2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a_i^*[y(x_0+\alpha h)] = a_i^*[z(\alpha)]$, получаем коэффициенты Чебышёва решения $y(x_0+\alpha h)$:

$$a_i^*[y(x_0+\alpha h)] = \frac{h^2}{16}\frac{(i+1)a_{i-2}^*[\Phi] - 2ia_i^*[\Phi] + (i-1)a_{i+2}^*[\Phi]}{i(i^2-1)}, \qquad i > 2. \qquad (22)$$

Найдем выражения для остальных коэффициентов Чебышёва: $a_2^*[y(x_0+\alpha h)]$, $a_1^*[y(x_0+\alpha h)]$ и $a_0^*[y(x_0+\alpha h)]$. Для этого используем формулу (17) для $\varphi = z(\alpha)$.

Положим в (17) $i=2$, а затем воспользуемся (18):

$$a_2^*[z] = \frac{1}{4\cdot 2}\big(a_1^*[z'] - a_3^*[z']\big) = \frac{h^2}{4\cdot 2}\Big(\frac{a_0^*[\Phi] - a_2^*[\Phi]}{4} - \frac{a_2^*[\Phi] - a_4^*[\Phi]}{4\cdot 3}\Big).$$

Приводя подобные члены, имеем

$$a_2^*[y(x_0+\alpha h)] = \frac{h^2}{96}\big(3a_0^*[\Phi] - 4a_2^*[\Phi] + a_4^*[\Phi]\big). \tag{23}$$

Положим в (17) $i = 1$. Тогда с учетом (9) имеем

$$a_1^*[z] = \frac{1}{4}\big(a_0^*[z'] - a_2^*[z']\big) = \frac{h}{4}\big(a_0^*[y'(x_0+\alpha h)] - a_2^*[y'(x_0+\alpha h)]\big).$$

Далее воспользуемся выражением (20) для нулевого коэффициента Чебышёва производной и значением правой части равенства (19) при $i = 2$ для второго коэффициента Чебышёва производной. В результате получим выражение для первого коэффициента Чебышёва решения:

$$a_1^*[y(x_0+\alpha h)] = \frac{h}{2}\Big[y_0' + \frac{h}{4}\big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}a_1^*[\Phi]\big) +$$
$$+ \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi] - \frac{h}{2\cdot 8}\big(a_1^*[\Phi] - a_3^*[\Phi]\big)\Big].$$

Приводя подобные члены, имеем

$$a_1^*[y(x_0+\alpha h)] = \frac{h}{2}\Big[y_0' + \frac{h}{4}\big(a_0^*[\Phi] - \frac{3}{4}a_1^*[\Phi] + \frac{1}{4}a_3^*[\Phi]\big) + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi]\Big]. \tag{24}$$

Теперь перейдем к выводу выражения для нулевого коэффициента Чебышёва

решения $y(x_0+\alpha h)$. Для этого вернемся к начальному условию (7). Подставим в разложение (11) для $z(\alpha)$ значение $\alpha = 0$ и полученную сумму ряда приравняем значению y_0 из условия (7):

$$y_0 = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[z]\cdot T_i^*(0) = \frac{1}{2}a_0^*[z] + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i^*[z].$$

Преобразуем правую часть полученного равенства. Для этого воспользуемся, как и раньше, соотношением (17) для $\varphi = z(\alpha)$ между коэффициентами Чебышёва функции и ее производной:

$$y_0 = \frac{1}{2}a_0^*[z] + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\big) = \frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}a_0^*[z'] - \Big(-\frac{1}{4\cdot 1}a_2^*[z']\Big) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\big(a_{i-1}^*[z'] - a_{i+1}^*[z']\big).$$

Теперь применим еще раз соотношение (17), полагая в нем $\varphi = z'(\alpha)$:

$$y_0 = \frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}a_0^*[z'] - \Big[-\frac{1}{4\cdot 1}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}\big(a_1^*[z''] - a_3^*[z'']\big)\Big] + \\ + \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{4i}\Big[\frac{1}{4(i-1)}\big(a_{i-2}^*[z''] - a_i^*[z'']\big) - \frac{1}{4(i+1)}\big(a_i^*[z''] - a_{i+2}^*[z'']\big)\Big].$$

Выражение в квадратных скобках перед знаком суммы $\sum$ совпадает с взятым со знаком минус вычитаемым, стоящим под знаком суммы и которое соответствует значению индекса $i = 1$. Каждая разность вида

$$\frac{1}{4(j+1)}\big(a_j^*[z''] - a_{j+2}^*[z'']\big), \qquad j = 1, 2, \ldots$$

входит в правую часть полученного равенства два раза: один раз с коэффициентом $-\dfrac{(-1)^j}{4j}$, второй раз с коэффициентом $\dfrac{(-1)^{j+2}}{4(j+2)}$. Разность

$$\frac{1}{4}\big(a_0^*[z''] - a_2^*[z'']\big)$$

войдет только один раз с коэффициентом $\dfrac{1}{4\cdot 2}$. Поэтому предыдущее равенство может быть приведено к виду

$$y_0 = \frac{1}{2}a_0^*[z] - \frac{1}{4}a_0^*[z'] + \frac{1}{4\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\big(a_0^*[z''] - a_2^*[z'']\big) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{4(j+2)} - \frac{1}{4j}\Big)\frac{1}{4(j+1)}\big(a_j^*[z''] - a_{j+2}^*[z'']\big).$$

Отсюда с учетом (9) и (16) имеем

$$\frac{1}{2}a_0^*[z] = y_0 + \frac{h}{4}a_0^*[y'(x_0+\alpha h)] - \frac{h^2}{32}\big(a_0^*[\Phi] - a_2^*[\Phi]\big) - \\ - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\Big)\,\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}.$$

Используя (20) и приводя подобные члены, окончательно получаем выражение для нулевого коэффициента Чебышёва решения

$$\frac{1}{2}a_0^*[y(x_0+\alpha h)] = y_0 + \frac{h}{2}y_0' + \frac{h^2}{32}\big(3a_0^*[\Phi] - 2a_1^*[\Phi] + a_2^*[\Phi]\big) + \\ + \frac{h^2}{8}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^*[\Phi] - \frac{h^2}{16}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j}\Big)\,\frac{a_j^*[\Phi] - a_{j+2}^*[\Phi]}{j+1}. \tag{25}$$

Замечание. Если коэффициенты Чебышёва функции

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\big) \tag{15}$$

удовлетворяет условию

$$a_i^*[\Phi] = 0, \qquad i \geqslant k + 1, \tag{26}$$

то для коэффициентов Чебышёва решения задачи Коши (1), (2) и его производной выполняются следующие соотношения:

$$a_i^*[y'] = 0, \qquad i \geqslant k + 2, \tag{27}$$

$$a_i^*[y] = 0, \qquad i \geqslant k + 3, \tag{28}$$

Соотношение (27) следует из формулы (19), а соотношение (28) — из (22).

В качестве примера найдем разложение решения следующей задачи Коши и его производной в смещенные ряды Чебышёва на отрезке $[0, 1]$:

$$y''(x) = 2 + T_3^*(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Из (20) находим нулевой коэффициент Чебышёва функции $y'(x)$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*[y'] = \frac{49}{16}\,.$$

Из (19) последовательно определяем остальные коэффициенты Чебышёва функции $y'(x)$:

$$a_1^*[y'] = 1, \quad a_2^*[y'] = -\frac{1}{8}\,, \quad a_3^*[y'] = 0, \quad a_4^*[y'] = \frac{1}{16}\,, \quad a_i^*[y'] = 0, \quad i \geqslant 5.$$

Из (25) находим нулевой коэффициент Чебышёва функции $y(x)$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*[y] = \frac{97}{40}\,.$$

Из (24) определяем первый коэффициент $a_1^*[y] = \dfrac{25}{16}$. Из (23) вычисляем второй коэффициент $a_2^*[y] = \dfrac{1}{8}$. Из (22) находим остальные коэффициенты:

$$a_3^*[y] = -\frac{1}{64}\,, \quad a_4^*[y] = 0, \quad a_5^*[y] = \frac{1}{320}\,, \quad a_i^*[y] = 0 \ \text{ при } \ i \geqslant 6.$$

Получаем окончательный ответ:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{49}{16} + T_1^*(x) - \frac{1}{8}T_2^*(x) + \frac{1}{16}T_4^*(x),\\
y(x) \ &= \frac{97}{40} + \frac{25}{16}T_1^*(x) + \frac{1}{8}T_2^*(x) - \frac{1}{64}T_3^*(x) + \frac{1}{320}T_5^*(x).
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.Том III. М.: Наука, 1970.
3. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Продолжение курса. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
5. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.